



گروه آموزشی : ریاضی

نام و نام خانوادگی : .....

تاریخ : ۱۳۹۴/۸/۲۸

شماره دانشجویی : .....

وقت : ۷۵ دقیقه

نام مدرس : .....

دانشکده علوم ریاضی

امتحان میان ترم درس : ریاضی ۱-فنی ( ۱۸ گروه هماهنگ )

نیمسال ( اول / دوم ) ۱۳۹۴ - ۱۳۹۵

توجه :

از نوشتن با مداد خودداری نمایید. استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

در طول امتحان به هیچ سوالی پاسخ داده نمی شود.

سوال ۱ - اعداد حقیقی  $a$  و  $b$  را چنان بیابید که  $z_1 = 1 - i$  یک ریشه معادله  $z^7 + az^5 + b = 0$  باشد. ۱۵ نمره

سوال ۲ - تابع  $g(x) = -\left|\frac{1}{2}x + 2\right|$  داده شده است. ضابطه تابع  $g \circ g(x)$  را بنویسید. ۱۵ نمره

سوال ۳ - حدهای زیر را محاسبه کنید : ۱۵+۵ نمره

$$l_1 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9} \qquad l_2 = \lim_{x \rightarrow 0} x(1 - \cos \frac{1}{x})$$

سوال ۴ - مقدار تقریبی  $\arctan(1.05)$  را محاسبه کنید.  $(\frac{\pi}{4} \cong 0.7854)$  ۱۵ نمره

سوال ۵ - معادله خط قائم بر منحنی  $3x^2 + \sin(x+y) + y^2 = 4$  در نقطه  $(1, -1)$  را بنویسید. ۱۵ نمره

موفق باشید

جواب سوال ۱: ریشه  $z_1 = 1 - i$  را در معادله قرار می‌دهیم:  $z^5 + az^5 + b = (1-i)^5 + a(1-i)^5 + b = 0$

بعد از ساده کردن عبارت‌ها داریم:  $(\lambda - 4a + b) + (\lambda + 4a)i = 0$  و یا  $\lambda(1+i) + 4a(-1+i) + b = 0$

بنابر این داریم:  $\lambda + 4a = 0$ ,  $\lambda - 4a + b = 0$  که نتیجه می‌دهد:  $a = -2$ ,  $b = -16$

جواب سوال ۲: تابع  $g(x) = -\left|\frac{1}{2}x + 2\right|$  را به صورت دو ضابطه ای می‌نویسیم.

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x + 2 & x < -4 \\ -\frac{1}{2}x - 2 & -4 \leq x \end{cases}$$

اکنون داریم  $g \circ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}g(x) + 2 & g(x) < -4 \\ -\frac{1}{2}g(x) - 2 & -4 \leq g(x) \end{cases}$  و بازه‌هایی را مشخص کنیم که در آنها  $g(x) < -4$  و یا  $g(x) \geq -4$

اگر  $x < -4$  آنگاه  $g(x) = \frac{1}{2}x + 2$  حال اگر  $g(x) = \frac{1}{2}x + 2 < -4$  باید داشته باشیم  $x < -12$

و اگر  $g(x) = \frac{1}{2}x + 2 \geq -4$  باید داشته باشیم  $-12 \leq x < -4$ .

اگر  $x \geq -4$  آنگاه  $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2$  حال اگر  $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2 < -4$  باید داشته باشیم  $x > 4$

و اگر  $g(x) = -\frac{1}{2}x - 2 \geq -4$  باید داشته باشیم  $-4 \leq x \leq 4$ .

بطور خلاصه داریم: اگر  $x > 4$  و یا  $x < -12$  داریم  $g(x) < -4$  و اگر  $-12 \leq x < -4$  و یا  $-4 \leq x \leq 4$  داریم  $g(x) \geq -4$  اکنون ضابطه تابع به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$g \circ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 2\right) + 2 & x < -12 \\ -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}x + 2\right) - 2 & -12 \leq x < -4 \\ -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) - 2 & -4 \leq x \leq 4 \\ \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}x - 2\right) + 2 & 4 < x \end{cases} \rightarrow g \circ g(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x + 3 & x < -12 \\ -\frac{1}{4}x - 3 & -12 \leq x < -4 \\ \frac{1}{4}x - 1 & -4 \leq x \leq 4 \\ -\frac{1}{4}x + 1 & 4 < x \end{cases}$$

جواب سوال ۳: داریم:  $l_1 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} |x - 3|$

چون  $x \rightarrow 3^-$  پس  $x < 3$  و  $|x - 3| = -(x - 3)$  و همچنین می‌توانیم فرض کنیم که  $x$  به قدر کافی به ۳ نزدیک شده است

بطوری که  $[x] = 2$ . اکنون داریم:  $l_1 = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x] - 3}{x - 3} \sqrt{x^2 - 6x + 9} = \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2 - 3}{x - 3} (-(x - 3)) = 1$

چون  $\lim_{x \rightarrow 0} x = 0$  و  $f(x) = 1 - \cos \frac{1}{x}$  یک تابع کراندار است پس:  $l_1 = \lim_{x \rightarrow 0} x(1 - \cos \frac{1}{x}) = 0$

جواب سوال ۴: می دانیم که اگر تابع  $f$  در یک بازه شامل  $a$  مشتقپذیر باشد و  $h$  مقدار کوچکی باشد داریم:

$$f(a+h) \cong f'(a)h + f(a)$$

قرار می دهیم  $f(x) = \arctan x$  و  $a = 1$  و  $h = 0.5$  بنابر این  $f'(x) = \frac{1}{1+x^2}$  و بالاخره داریم:

$$\arctan(1.5) \cong \frac{1}{1+1} \times 0.5 + \arctan(1) = 0.25 + 0.7854 = 1.0354$$

جواب سوال ۵: برای پیدا کردن شیب خط قائم باید مشتق  $y$  را نسبت به  $x$  محاسبه کنیم.

$$6x + \cos(x+y) + y' \cos(x+y) + 2yy' = 0 \rightarrow y' = -\frac{6x + \cos(x+y)}{\cos(x+y) + 2y} \rightarrow y'(1) = -\frac{6+1}{1-2} = 7$$

پس شیب خط قائم برابر  $\frac{-1}{7}$  است و معادله آن عبارت است از:  $y = \frac{-1}{7}x - \frac{6}{7}$  یا  $x + 7y + 6 = 0$